# Devoir maison n° 10 - Correction

**Exercice 1. Étude d'une équation différentielle linéaire** (*d'après CNM TSI 2022*)
Dans cet exercice, on s'intéresse à la résolution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1+x^2)^2 \ln x. \tag{1}$$

**Partie I - Résultats préliminaires utiles**

**Q1.** Déterminer les valeurs des réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout $x > 0$, $\dfrac{2}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

On met au même dénominateur : $\dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1} = \dfrac{a(x^2+1)+x(bx+c)}{x(x^2+1)} = \dfrac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$.
Par identification, il vient $\boxed{a = 2,\ c = 0 \text{ et } a+b = 0, \text{ d'où } b = -2}$.

**Q2.** En déduire une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x(x^2+1)}$.

D'après la question précédente, $\boxed{x \mapsto 2\ln|x| - \ln|x^2+1|}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x(x^2+1)}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

**Q3.** À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x\ln x$.

Déterminons la primitive de $t \mapsto t\ln t$ qui s'annule en 1, *i.e.* calculons $\displaystyle\int_1^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

Soit $x \in\, ]0\,;+\infty[$. On pose $\begin{cases} u = \ln t \\ v' = t \end{cases}$ donc $\begin{cases} u' = \frac{1}{t} \\ v = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$. Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1\,;x]$ donc par intégration par parties :

$$\int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - 0 - \left[\frac{1}{4}t^2\right]_1^x = \boxed{\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}}.$$

*Remarque : comme on veut juste une primitive, on pourrait supprimer la constante* $1/4$.

**Q4.** Vérifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{9}x^3 - x - \dfrac{1}{3}x(x^2-3)\ln(x)$ est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto (1-x^2)\ln x$.

Notons $f$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{9}x^3 - x - \dfrac{1}{3}x(x^2-3)\ln(x)$. Elle est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions usuelles dérivables sur cet intervalle. Par dérivée d'un double produit (rappelons que $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$), pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3}{9}x^2 - 1 - \frac{1}{3}\left[(x^2-3)\ln(x) + x \times 2x\ln(x) + x(x^2-3)\frac{1}{x}\right] \\
&= \frac{1}{3}x^2 - 1 - \frac{1}{3}\left[(3x^2-3)\ln(x) + x^2 - 3\right] \\
&= \frac{1}{3}x^2 - 1 - (x^2-1)\ln(x) - \frac{1}{3}x^2 + 1 \\
&= (1-x^2)\ln x.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est bien une primitive de } x \mapsto (1-x^2)\ln x \text{ sur } ]0\,;+\infty[}$.
*Remarque : On pouvait aussi commencer par développer l'expression donnée au départ pour faciliter le calcul de la dérivée.*

**Partie II - Résolution de l'équation homogène associée**

Dans cette partie on s'intéresse à l'équation homogène (2) associée à (1) :

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{2}$$

**Q5.** Déterminer $\alpha > 0$ pour que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (2).

Soit $\alpha > 0$. La fonction $h\colon x \mapsto x^\alpha$ est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ en tant que fonction polynomiale. Pour tout $x > 0$, on a $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $h''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.
Ainsi, $f$ est solution de (2) si et seulement, pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} & (1+x^2)h''(x) - 2xh'(x) + 2h(x) = 0 \\ \iff & (1+x^2)\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 2\alpha x^\alpha + 2x^\alpha = 0 \\ \iff & \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \alpha(\alpha-1)x^\alpha - 2(\alpha-1)x^\alpha = 0 \\ \iff & \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + (\alpha-1)(\alpha-2)x^\alpha = 0. \end{aligned}$$

Par identification, il vient $\begin{cases} \alpha(\alpha-1) = 0 \\ (\alpha-1)(\alpha-2) = 0 \end{cases}$ qui a pour unique solution $\boxed{\alpha = 1}$.

*Remarque : ce résultat est cohérent avec la question suivante dans laquelle débute une méthode par abaissement de l'ordre avec $x \mapsto x$ comme solution homogène.*

Soit $g$ une fonction deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Pour $x$ dans cet intervalle, on pose $f(x) = xg(x)$.

**Q6.** Justifier que $f$ est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ puis exprimer $f'$ et $f''$ en fonction de $g$ et de ses dérivées.

La fonction $f$ est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont.
De plus, par dérivation d'un produit, pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$, on a $\boxed{f'(x) = g(x) + xg'(x)}$ puis en dérivant de nouveau $\boxed{f''(x) = g'(x) + g'(x) + xg''(x) = 2g'(x) + xg''(x)}$.

**Q7.** Montrer que $f$ est solution de (2) si et seulement si $g'$ est solution de l'équation différentielle

$$z' + \frac{2}{x(x^2+1)}z = 0. \tag{3}$$

En injectant les expressions précédentes dans (2), on a $f$ solution de (2) si et seulement si pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} & (1+x^2)f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x) = 0 \\ \iff & (1+x^2)\left[2g'(x) + xg''(x)\right] - 2x\left[g(x) + xg'(x)\right] + 2xg(x) = 0 \\ \iff & x(1+x^2)g''(x) + 2g'(x) = 0 \\ \iff & g''(x) + \frac{2}{x(1+x^2)}g'(x) = 0 \qquad \textit{car } x(1+x^2) \neq 0 \text{ sur } ]0\,;+\infty[, \end{aligned}$$

*i.e.* la fonction $g'$ est solution de l'équation (3).
D'où l'équivalence $\boxed{f \text{ solution de (2) si et seulement si } g' \text{ solution de (3)}}$.

**Q8.** Résoudre l'équation différentielle (3) sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Il s'agit d'une équation différentielle homogène d'ordre 1, il suffit donc de connaître une primitive du terme devant $z$, ce qui est le cas d'après **Q2**.
Ainsi les solutions de (3) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\left(2\ln(x) - \ln(1+x^2)\right)} = \lambda\frac{\mathrm{e}^{\ln(1+x^2)}}{\mathrm{e}^{\ln(x^2)}} = \boxed{\lambda\frac{1+x^2}{x^2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}.$$

**Q9.** En déduire l'ensemble $\Sigma_0$ des solutions de (2) sur $]0\,;+\infty[$.

D'après **Q7**, $g'$ est solution de (3) donc, d'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \lambda \dfrac{1+x^2}{x^2} = \lambda\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)$. Les primitives de cette fonction sont celles de la forme $g(x) = \lambda\left(-\dfrac{1}{x}+x\right) + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Enfin, on obtient que les solutions de (2) sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions de la forme $f(x) = xg(x)$, *i.e.*

$$\boxed{\Sigma = \left\{x \mapsto \lambda(x^2-1) + \mu x \text{ avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

**Partie III - Recherche d'une solution particulière [partie facultative]**

On note $\Sigma$ l'ensemble des solutions de (1) sur $]0\,;+\infty[$.

**Q10.** On suppose que l'on connaît une solution $\varphi_0$ de (1). Montrer que $\Sigma = \{\varphi_0 + h\,;\ h \in \Sigma_0\}$.

On procède par double inclusion.

$\boxed{\supset}$ Soient $h \in \Sigma_0$ et $\psi = \varphi_0 + h$. On a

$$\begin{aligned}(1+x^2)\psi'' - 2x\psi' + 2\psi &= (1+x^2)(\varphi_0+h)'' - 2x(\varphi_0+h)' + 2(\varphi_0+h)\\ &= (1+x^2)\varphi_0'' - 2x\varphi_0' + 2\varphi_0 + (1+x^2)h'' - 2xh' + 2h\\ &= (1+x^2)^2\ln x + 0,\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que $\varphi_0$ est solution de (1) et $h$ solution de (2). Ainsi $\psi$ est bien une solution de (1), *i.e.* $\psi \in \Sigma$.

$\boxed{\subset}$ Soit $\psi \in \Sigma$, *i.e.* $\psi$ est une solution de (1). En injectant dans (2), on vérifie (calculs analogues à la première inclusion) que $\psi - \varphi_0$ est une solution de (2), *i.e.* $\psi - \varphi_0 \in \Sigma_0$. Il existe donc $h \in \Sigma_0$ tel que $\psi - \varphi_0 = h$, *i.e.* $\psi = \varphi_0 + h$.

On cherche une solution particulière de (1) sous la forme

$$\varphi\colon x \longmapsto x\lambda(x) + (x^2-1)\mu(x),$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vérifiant :

$$\forall x > 0,\ x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0. \tag{4}$$

**Q11.** Justifier que la fonction $\varphi$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ puis exprimer $\varphi'$ à l'aide des fonctions $\lambda$ et $\mu$.

*Remarque culturelle : la forme sous laquelle on cherche la solution particulière provient de celle des solutions de l'équation homogène déterminées dans la partie précédente. Il s'agit en fait d'une méthode appelée « variation des constantes », une généralisation (hors programme en TSI) de celle vu dans le cas de l'ordre* 1 *où il n'y a qu'une constante.*

La fonction $\varphi$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions qui le sont.

Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \lambda(x) + x\lambda'(x) + 2x\mu(x) + (x^2-1)\mu'(x)\\ &= \lambda(x) + 2x\mu(x) + \underbrace{x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x)}_{=0 \text{ par } (4)} = \boxed{\lambda(x) + 2x\mu(x)}.\end{aligned}$$

**Q12.** En déduire que la fonction $\varphi$ est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ puis exprimer $\varphi''$ à l'aide des fonctions $\lambda'$, $\mu$ et $\mu'$.

D'après la question précédente, $\varphi'$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions qui le sont, *i.e.* $\boxed{\varphi \text{ est deux fois dérivable sur } ]0\,;+\infty[}$ (sans avoir eu à supposer que $\lambda$ et $\mu$ le sont !). De plus, pour tout $x > 0$, on a

$$\boxed{\varphi''(x) = \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x)}.$$

**Q13.** Montrer que la fonction $\varphi$ est solution de (1) sur $]0\,;+\infty[$ si et seulement si

$$\forall x > 0,\ \ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln x. \tag{5}$$

La fonction $\varphi$ est solution de (1) sur $]0\,;+\infty[$ si et seulement si, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
& (1+x^2)\varphi''(x) - 2x\varphi'(x) + 2\varphi(x) = (1+x^2)^2\ln x \\
\overset{\textbf{Q11}\&\textbf{Q12}}{\iff} & (1+x^2)\left[\lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x)\right] - 2x\left[\lambda(x) + 2x\mu(x)\right] + 2\left[x\lambda(x) + (x^2-1)\mu(x)\right] = (1+x^2)^2\ln x \\
\iff & (1+x^2)\lambda'(x) + \underbrace{\left[2(1+x^2) - 4x^2 + 2(x^2-1)\right]}_{=0}\mu(x) + 2x(1+x^2)\mu'(x) + (-2x+2x)\lambda(x) = (1+x^2)^2\ln x \\
\overset{/(1+x^2)\neq 0}{\iff} & \boxed{\lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln x}
\end{aligned}$$

**Q14.** Soit $x > 0$. Déterminer les expressions des réels $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$ en résolvant le système linéaire formé par les équations (4) et (5), d'inconnues $\lambda'(x)$ et $\mu'(x)$.

On résout ce système grâce à l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0 \\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln x \end{cases} \quad \overset{L_1 \leftarrow L_1 - xL_2}{\iff} \quad \begin{cases} (-x^2-1)\mu'(x) = -x(1+x^2)\ln x \\ \lambda'(x) = (1+x^2)\ln x - 2x\mu'(x) \end{cases}$$

D'où $\boxed{\mu'(x) = x\ln x}$ puis $\boxed{\lambda'(x) = (1+x^2)\ln x - 2x^2\ln x = (1-x^2)\ln x}$.

**Q15.** En déduire les expressions des fonctions $\lambda$ et $\mu$.

Il suffit de déterminer une primitive de $\lambda'$ et une de $\mu'$. D'après **Q3** et **Q4**, on peut prendre

$$\boxed{\mu(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\lambda(x) = \frac{1}{9}x^3 - x - \frac{1}{3}x(x^2-3)\ln(x)}.$$

**Q16.** Préciser alors une solution particulière de (1) sur $]0\,;+\infty[$ et en déduire $\Sigma$.

D'après ce qui précède, la fonction suivante définie pour $x > 0$ est solution particulière de (1) :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= x\lambda(x) + (x^2-1)\mu(x) \\
&= \frac{1}{9}x^4 - x^2 - \frac{1}{3}x^2(x^2-3)\ln(x) + (x^2-1)\left(\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2\right) \\
&= \frac{1}{9}x^4 - x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \left[\frac{-1}{3}x^4 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]\ln(x) \\
&= \boxed{\frac{-5}{36}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^2(x^2+3)\ln x}.
\end{aligned}$$

Enfin, d'après **Q10**, on a $\Sigma = \{\varphi + h,\ h \in \Sigma_0\}$ et donc, via **Q9**,

$$\boxed{\Sigma = \left\{x \mapsto \lambda(x^2+1) + \mu x + \varphi(x),\ \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$